214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

L'idée du calcul différentiel, c'est d'approcher des fonctions assez régulières par des applications linéaires. Deux théorèmes importants du calcul différentiel sont les TIL et TFI. Le TIL se propose résoudre une équation y=f(x) en x=f^-1(y), le TFI de résoudre f(x,y)=0 en y=Phi(x). Leurs applications vont être nombreuses, dans des domaines variés : formes quadratiques, théorie des groupes, optimisation etc.

On travaille avec des fonctions de R^n dans R^p. U un ouvert de R^n.

I) Quelques définitions

Déf : une application U->R^p est dite C^k si f f admet des dérivées k-ièmes en tout point si ses dérivées premières sont C^k-1 [Rou 296]

Déf : un C^k difféo est une bijection de classe C^k à réciproque de classe C^k

Déf : sous variété [Rou 197]

Déf : submersion : application U->R^p dont la différentielle est surjective en tout point [Rou 197]

II) Théorème d'inversion locale

1) Les théorèmes d'inversion

Th : inversion locale ; faire un dessin [Rou 188]

Th de changement de coord [Rou 190]

Th : (inversion globale) U ouvert de R^n, f :U->R^n C^1, f injective sur U, et la jacobienne de f en tout point de x est inversible. Alors f(U) est un ouvert de R^n et f est un C^1-difféo [Rou 190]

2) Des applications

1ère appl : t->exp(it) est un mph surjectif de groupes *(en effet, la dérivée de exp en 1 est non nulle donc par TIL, c'est un difféo de R sur U au vois de 1. exp(iR) contient donc un ouvert, il est donc ouvert par principe de translation, et donc aussi fermé, par connexité c'est U entier)*

2e appl : racine kième de matrice [BMP 11]

3) Lemme de Milnor et applications [GT]

Lemme : lemme de Milnor

Th : Boule chevelue

Th : Brouwer

4) Formes quadratiques et lemme de Morse [Rou]

Prop : si une matrice symétrique S est pas trop loin d'une matrice symétrique non dégénérée S0 alors elle lui est congrue et la matrice de congruence dépend de manière C1 de S0

Appl : l'ensemble des fq de signature (p,q) est un ouvert dans Sn

Th : lemme de Morse

5) Théorème de submersion

Th : V est une sous variété de R^n de dimension d si en tout point a de V, il existe un voisinage U dans R^n et une fonction f :R^{n}->R^{n-d} tq V∩U=f^-1({0})∩U [Rou 200] *(utilise le TIL)*

Appl : PSL2(C)=SO3(C) *(on utilise le th de submersion (qui utilise lui-même le TIL) et le TIL)*

III) Théorème des fonctions implicites

1) Le théorème

Th : (TFI) U ouvert de R^n x R^p, et f une function définie sur U de classe C^1. On prend (a,b) tq f(a,b)=0, on suppose que la jacobienne de formée des sérivées partielles par rapport à y est inversible. Alors l'équation f(x,y) peut être résolu localement autour de (a,b) [Rou 192] *(on peut se ramener au TIL)*

Rq : TIL et TFI sont équivalents

Th : différentielle de la fonction implicite [Rou 194]

Exemple : $x^2+y^2-1=0$ [Rou 194]

Faire un dessin !

2) Racines de polynômes

Prop : si P est un polynôme à racine simple x0, alors les polynômes voisins ont une racine voisine de x_0 [BMP 11] *(on mq il existe une appl C^infini f définie sur un voisinage de P dans Rn[X] qui va dans un vois de x0 tq si x=f(P) alors P(x)=0 (TFI))*

Csq : l'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert de Rn[X] [BMP 12] *(Q un polynôme scindé à racines simples x1,…,xn). Pour chaque x_1 il y a une appl lisse f_i définie comme précedemment entre Ui et Vi. Les x_i sont disctincts alors on regarde des vois Vi' autour des xi, disjoints, et on définit Ui' l'image réciproque des Vi'. Les Ui' sont des vois ouverts de Q. Pour P dans l'intersection des Ui', f_i(P) est un polynôme à n racines disctinctes)*

3) Extrema liés

Th : extrema lies [Gou]

Csq : IAG [Gou]

Csq : inégalité d'Hadamard [GT]

Développements :
1 - SO3(C) isomorphe à PSL_2(C) [???] (***)
2 - Lemme de Morse [Rou 209 + 354] (**)

Bibliographie :
[Rou] Rouvière
[GT] Gonnord Tosel – Calcul diff
[Gou] Gourdon – Analyse
[BMP]

Pas mis :

- Il n'y a pas de petits groupes dans GLn(R) [MT 59] (appl du TIL)

Rapport jury 2005-2009 : on attend des applications en géométrie différentielle. Rappelons que les sous-variétés sont au programme.